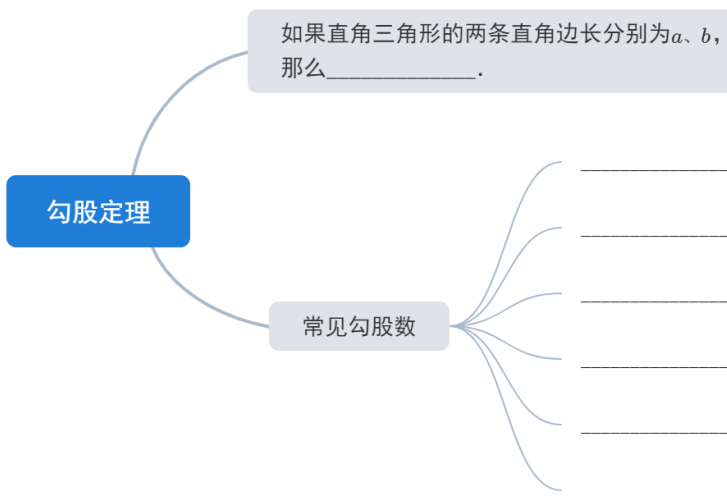


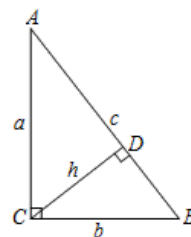
第2讲 勾股定理与逆定理

一、勾股定理



🔗 求直角三角形斜边上的高

如图所示，可得 $S_{\triangle ACB} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，
 $\therefore h = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

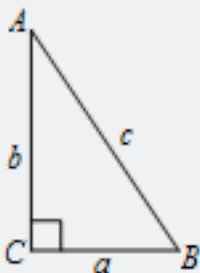


【教法备注】

1、在直角三角形 ($Rt\triangle$) ABC 中， $\angle A$ 所对的边为： a ， $\angle B$ 所对的边为： b ， $\angle C$ 所对的边为： c 。

2、如果直角三角形的两条直角边长分别为 a 、 b ，斜边长为 c ，那么 $a^2 + b^2 = c^2$ 。

即直角三角形中两条直角边的平方和等于斜边的平方。



如图所示：勾——短直角边(a)，股——长直角边(b)，弦——斜边(c)。

注意：

①勾股定理只适用于直角三角形，而不适用与锐角三角形和钝角三角形，所以常作辅助线——高，构造直角三角形。

②为方便应用勾股定理进行计算，常将 $a^2 + b^2 = c^2$ 进行如下变形：

$$a^2 = c^2 - b^2; b^2 = c^2 - a^2;$$

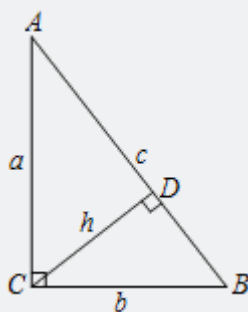
$$a = \sqrt{c^2 - b^2}; b = \sqrt{c^2 - a^2}; c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

3、常见勾股数：

① 3, 4, 5; ② 6, 8, 10; ③ 9, 12, 15; ④ 5, 12, 13; ⑤ 7, 24, 25; ⑥ 8, 15, 17.

注： ak 、 bk 、 ck (k 为正整数) 也是勾股数

4、求直角三角形斜边上的高：



如图所示，根据三角形的面积可得 $ab = ch \Rightarrow h = \frac{ab}{c}$ 。

总结：等面积法求直角三角形斜边上的高

|| 例题

1. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ，则下列式子中不成立的是（ ）。

A. $BC^2 = AB^2 + AC^2$ B. $AC^2 = BC^2 - AB^2$ C. $AB^2 = BC^2 - AC^2$ D. $AB^2 = AC^2 + BC^2$

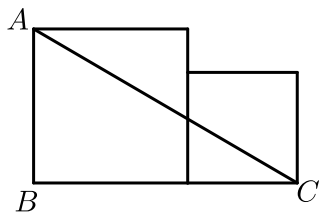
【答案】D

【解析】根据直角三角形的勾股定理斜边为 BC ，两直角边为 AB ， AC ，只有选项D不符合。

【标注】【知识点】直接用勾股求边长

|| 练习

2. 如图，两个正方形的面积分别为64和49，则 AC 等于（ ）。



A. 15

B. 17

C. 23

D. 113

【答案】 B

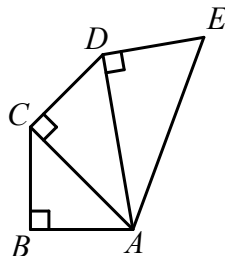
【解析】 $\because$ 两个正方形的面积分别是64和49,

$\therefore$ 边长分别为8和7.

根据勾股定理得: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 17$.

【标注】 【知识点】直接用勾股求边长

3. 如图所示, $AB = BC = CD = DE = 1$, $AB \perp BC$, $AC \perp CD$, $AD \perp DE$, 则 $AE = (\quad)$.



A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$

D. 2

【答案】 D

【解析】 $\because AB = BC = CD = DE = 1$, $AB \perp BC$, $AC \perp CD$, $AD \perp DE$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2};$$

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

$$AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2.$$

故选D.

【标注】 【知识点】直接用勾股求边长

|| 例题

4. 一直角三角形的三边分别为2、3、 x , 那么以 x 为边长的正方形的面积为().

A. 13

B. 5

C. 13或5

D. 4

【答案】C

【解析】当2和3都是直角边时，则 $x^2 = 4 + 9 = 13$ ，

当3是斜边时，则 $x^2 = 9 - 4 = 5$ 。

故选C。

【标注】【知识点】已知两边求第三边-分类讨论

【重点强调】

2017~2018学年天津河北区天津外国语大学附属外国语学校初二下学期单元测试《勾股定理》第2题3分

练习

5. 已知 x 、 y 为直角三角形的两边的长，且满足 $\sqrt{2x + y - 10} + |x - y + 1| = 0$ ，则第三边的长为_____。

【答案】5或 $\sqrt{7}$

【解析】由题意得，
$$\begin{cases} 2x + y - 10 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

解得，
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

则第三边的长 $= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 或 $\sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$ ，

故答案为：5或 $\sqrt{7}$ 。

【标注】【知识点】已知两边求第三边-分类讨论

例题

6. 一个直角三角形的两条直角边边长分别为3和4，则斜边上的高为（ ）。

A. 2

B. 2.2

C. 2.4

D. 2.5

【答案】C

【解析】设斜边长为 c ，高为 h 。

由勾股定理可得： $c^2 = 3^2 + 4^2$ ，

则 $c = 5$,

$$\text{直角三角形面积} S = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times c \times h$$

可得 $h = 2.4$,

故选C .

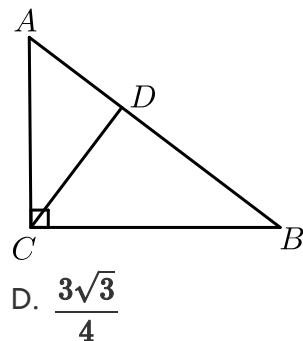
【标注】【知识点】直接用勾股求边长

【重点强调】

2018~2019学年3月天津和平区天津市双菱中学初二下学期月考第6题

练习

7. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 9$, $BC = 12$, 则点 C 到 AB 的距离是 () .



A. $\frac{36}{5}$

B. $\frac{12}{25}$

C. $\frac{9}{4}$

D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

【答案】A

【解析】在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 由勾股定理得: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 15$,

设点 C 到 AB 的距离为 h , 由等面积法得: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h$,

代入数据得 $h = \frac{36}{5}$.

【标注】【知识点】直接用勾股求边长

8. 已知直角三角形的一直角边为 $\sqrt{5}$, 斜边上的高为2, 则这个直角三角形的斜边为 () .

A. 3

B. 4

C. 5

D. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

【答案】C

【解析】设另一条直角边为 x , 则斜边长 $\sqrt{5 + x^2}$,

根据三角形面积公式依题意有: $\frac{1}{2} \times \sqrt{5}x = \frac{1}{2} \times \sqrt{5 + x^2} \times 2$,

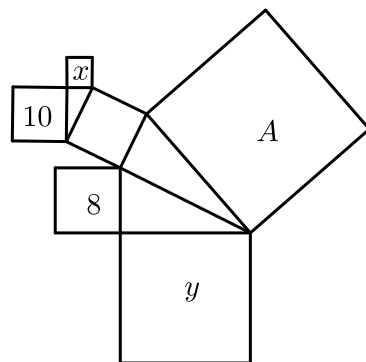
解得 $x_1 = 2\sqrt{5}$, $x_2 = -2\sqrt{5}$ (舍去) ,

$\therefore$ 这个直角的斜边长为 $\sqrt{5+x^2} = \sqrt{5+20} = 5$.

【标注】【知识点】直接用勾股求边长

|| 例题

9. 如图，图中的所有三角形都是直角三角形，所有四边形都是正方形，正方形A的边长为 $\sqrt{37}$ ，另外四个正方形中的数字8， x ，10， y 分别表示该正方形面积，则 x 与 y 的数量关系是_____.



【答案】 $x + y = 19$

【解析】 $\because$ 正方形A的边长为 $\sqrt{37}$,

$$\therefore S_A = 37,$$

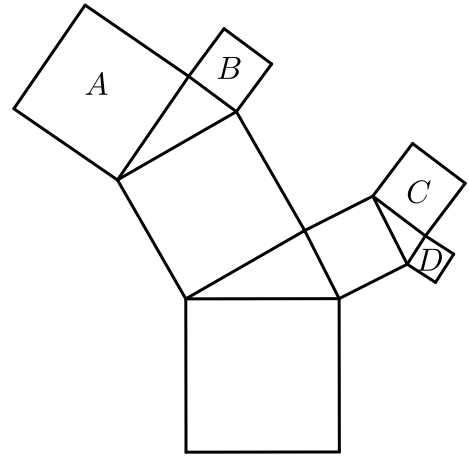
根据勾股定理的几何意义，得 $(x + 10) + (8 + y) = S_A = 37$,

$$\therefore x + y = 37 - 18 = 19, \text{ 即 } x + y = 19.$$

【标注】【知识点】勾股树

|| 练习

10. 如图所有的四边形都是正方形，所有的三角形是直角三角形，正方形A的边长8cm，B的边长为6cm，C的边长为4cm，D的边长为3cm，则最大的正方形的面积是() .



A. $\sqrt{125}\text{cm}^2$

B. 125cm^2

C. $\sqrt{145}\text{cm}^2$

D. 145cm^2

【答案】 B

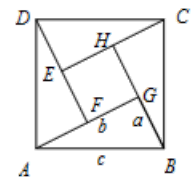
【标注】 【知识点】 勾股树

二、勾股定理的证明

🧠 赵爽的“勾股圆方图”（又称“赵爽弦图”）

如图是由4个全等的直角三角形拼成的大正方形，直角三角形的两条直角边长分别为 a ， b （ $b > a$ ），斜边为 c ，中间是小正方形，且边长为 $(b - a)$ 。

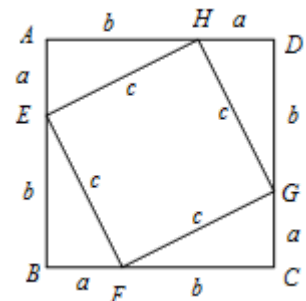
证明：



🧠 邹元治的证明

如图是由4个全等的直角三角形拼成的大正方形，直角三角形的两条直角边分别为 a 、 b ，斜边为 c ，中间是小正方形，且边长为 c 。

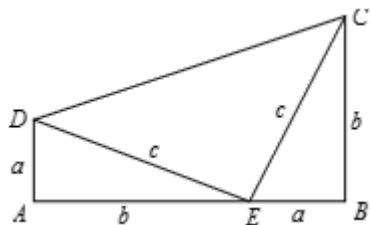
证明：



💡 1976年美国总统詹姆斯·加菲尔德的证明

如图是由2个全等的直角三角形（以 a 、 b 为直角边，以 c 为斜边）和一个等腰直角三角形（以 c 为直角边）拼成的直角梯形。

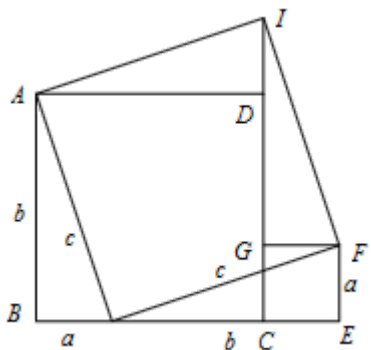
证明：



💡 陈杰的证明

如图，图中有4个全等的直角三角形（以 a 、 b 为直角边，以 c 为斜边），3个正方形，边长分别为 a 、 b 、 c ，设整个图形面积为 S 。

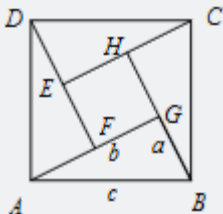
证明：



【教法备注】

①赵爽的“勾股圆方图”（又称“赵爽弦图”）

如图是由4个全等的直角三角形拼成的大正方形，直角三角形的两条直角边长分别为 a 、 b （ $b > a$ ），斜边为 c ，中间是小正方形，且边长为 $(b - a)$ 。



证明：

由图可得 $S_{\text{四边形}ABCD} = c^2$ ，

易证四边形 $EFGH$ 为正方形，

$\therefore EF = FG = GH = HE = (b - a)$ ，

$\therefore S_{\text{四边形}EFGH} = (b - a)^2$ ，

又 $\because S_{\triangle ABG} = S_{\triangle BCH} = S_{\triangle CDE} = S_{\triangle ADF} = \frac{1}{2}ab$ ，

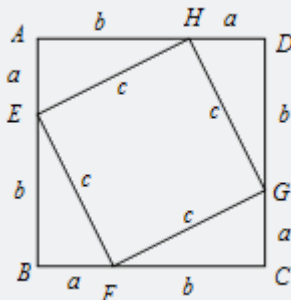
$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = 4S_{\triangle ADF} + S_{\text{四边形}EFGH} = 4 \times \frac{1}{2}ab + (b-a)^2,$$

$$\therefore c^2 = 4 \times \frac{1}{2}ab + (b-a)^2,$$

$$\text{整理得: } a^2 + b^2 = c^2$$

②邹元治的证明：

如图是由4个全等的直角三角形拼成的大正方形，直角三角形的两条直角边分别为 a 、 b ，斜边为 c ，中间是小正方形，且边长为 c 。



证明：

由图可得四边形 $ABCD$ 的边长 $AD = AH + HD = b + a$,

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = (a+b)^2,$$

$$S_{\triangle AEH} = S_{\triangle HDG} = S_{\triangle EBF} = S_{\triangle FCG} = \frac{1}{2}ab,$$

$$S_{\text{四边形}EFGH} = c^2,$$

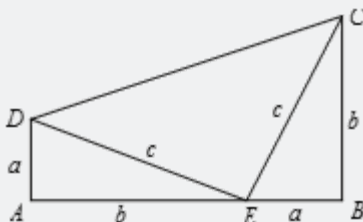
$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = 4S_{\triangle AEH} + S_{\text{四边形}EFGH} = 4 \times \frac{1}{2}ab + c^2,$$

$$\therefore (a+b)^2 = 4 \times \frac{1}{2}ab + c^2,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2$$

③1976年美国总统詹姆斯·加菲尔德的证明：

如图是由2个全等的直角三角形（以 a 、 b 为直角边，以 c 为斜边）和一个等腰直角三角形（以 c 为直角边）拼成的直角梯形。



证明：

$$\therefore S_{\text{梯形}} = \frac{1}{2}(a+b) \cdot (a+b) = \frac{1}{2}(a+b)^2,$$

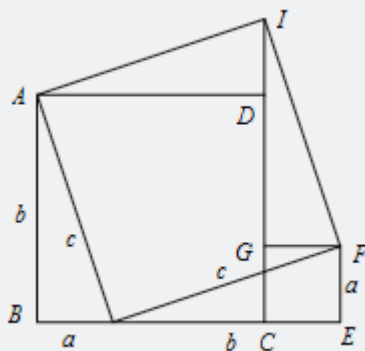
$$S_{\text{梯形}} = 2S_{\triangle ADE} + S_{\triangle DEC} = 2 \cdot \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2 = ab + \frac{1}{2}c^2,$$

$$\therefore \frac{1}{2}(a+b)^2 = ab + \frac{1}{2}c^2,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2.$$

④陈杰的证明：

如图，图中有4个全等的直角三角形（以 a 、 b 为直角边，以 c 为斜边），3个正方形，边长分别为 a 、 b 、 c ，设整个图形面积为 S 。



证明：

$$\because S = a^2 + b^2 + 2 \times \frac{1}{2}ab = a^2 + b^2 + ab,$$

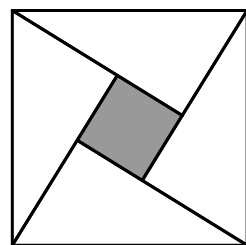
$$S = c^2 + 2 \times \frac{1}{2}ab = c^2 + ab,$$

$$\therefore a^2 + b^2 + ab = c^2 + ab,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2.$$

|| 例题

11. 如图，由四个全等的直角三角形拼成如图所示的“赵爽弦图”，若直角三角形的斜边长为2，最短的边长为1，则图中阴影部分的面积为_____。



【答案】 $4 - 2\sqrt{3}$

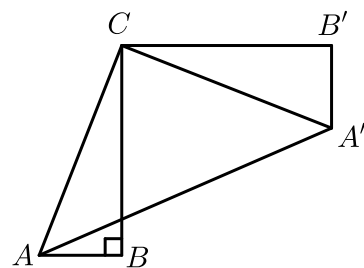
【解析】 $\because$ 直角三角形斜边长为2，最短的边长为1，
 $\therefore$ 该直角三角形的另外一条直角边长为 $\sqrt{3}$ ，
 $\therefore S_{\text{阴影}} = 2^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = 4 - 2\sqrt{3}$ 。

【标注】【知识点】弦图

【重点强调】

2017~2018学年天津武清区初二下学期期中第18题3分

12. 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 2$, $BC = 4$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转 90° , 得到旋转后的图形 $\triangle A'B'C$.



- (1) $\angle BCB'$ 的度数是 _____ (度) .
 (2) AC 的长为 _____ .
 (3) 求线段 AA' 的长 .

【答案】 (1) 90

(2) $2\sqrt{5}$

(3) $2\sqrt{10}$.

【解析】 (1) $\because$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle A'B'C'$,

$$\therefore \angle BCB' = 90^\circ .$$

(2) $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 2$, $BC = 4$,

$$\therefore \text{在Rt}\triangle ABC\text{中}, AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} .$$

(3) 由题意, $AC = A'C = 2\sqrt{5}$, $\angle ACA' = 90^\circ$,

$$\therefore \text{在Rt}\triangle ACA'\text{中}, AA' = \sqrt{AC^2 + A'C^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{10} .$$

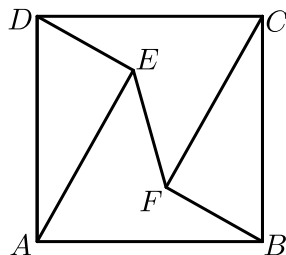
【标注】【知识点】旋转性质综合应用

【重点强调】

2017~2018学年天津津南区初二下学期期末第20题8分

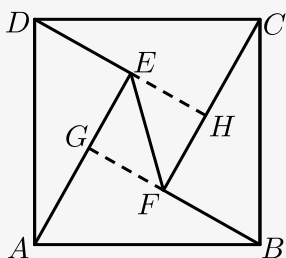
|| 练习

13. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, 分别以 AD , BC 为斜边作 $\text{Rt}\triangle ADE$ 和 $\text{Rt}\triangle CBF$, 且 $\text{Rt}\triangle ADE \cong \text{Rt}\triangle CBF$, 连接 EF , 若 $S_{\text{正方形}ABCD} = 20$, $S_{\triangle ADE} = 3$, 则 $EF =$ _____ .



【答案】4

【解析】利用弦图补全图形，



利用条件 $S_{\text{正方形}ABCD} = 20$, $S_{\triangle ADE} = 3$,

易知 $S_{EHFG} = 8$.

由 $EHFG$ 为正方形, 可得 $EF = 4$.

故答案为: 4.

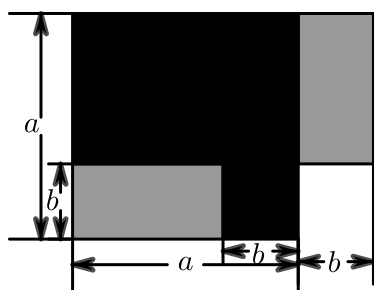
【标注】【知识点】弦图

14. 阅读材料:

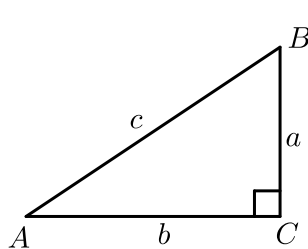
通过整式乘法的学习, 我们进一步了解了利用图形面积来说明法则、公式等的正确性的方法,

例如利用图甲可以对平方差公式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 给予解释.

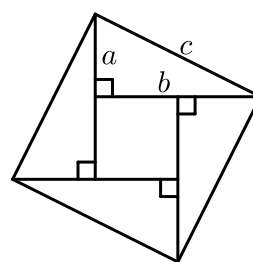
图乙中的 $\triangle ABC$ 是一个直角三角形, $\angle C = 90^\circ$, 人们很早就发现直角三角形的三边 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$ 的关系, 我国汉代“赵爽弦图”(如图丙)就巧妙的利用图形面积证明了这一关系.



图甲

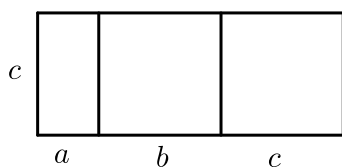


图乙

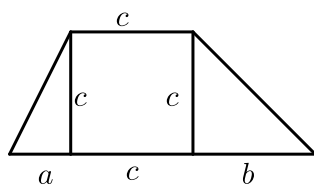


图丙

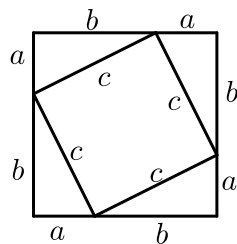
请回答: 下列几何图形中, 可以正确的解释直角三角形三边这一关系的图有 _____. (直接填写图序号)



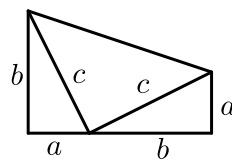
①



②



③



④

【答案】③④

【解析】通过面积法进行求解，

③中， $(a+b)^2 = c^2 + 4 \times ab \times \frac{1}{2}$ ，整理得 $a^2 + b^2 = c^2$ ，

④中由梯形的面积为 $(a+b)^2 \times \frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$ ，整理得 $a^2 + b^2 = c^2$ 。

【标注】【知识点】勾股定理的证明

三、勾股定理逆定理

勾股定理逆定理

勾股定理逆定理

如果三角形的三边长 a 、 b 、 c 满足_____，
那么这个三角形是_____。

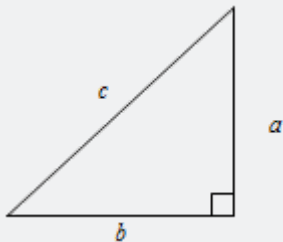
锐角/钝角三角形三边关系

钝角三角形：_____（三边关系）

锐角三角形：_____（三边关系）

【教法备注】

1、如果三角形的三边长 a 、 b 、 c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$ ，那么这个三角形是直角三角形。

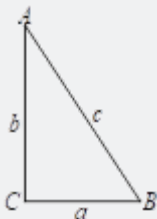


勾股定理的逆定理，条件是三角形三边长，结论是直角三角形，即由边的条件得到角的结论，所以在几何题中需要进行边角的转换时要联想勾股定理逆定理。

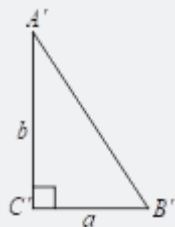
勾股定理的逆定理是判定直角三角形的一个依据，判断时要先确定最大边（不妨设为 c ）

勾股定理逆定理的证明：

如图，已知 $\triangle ABC$ 的三边 a 、 b 、 c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$ ，求证： $\triangle ABC$ 是直角三角形。



证明：分别以 a 、 b 为直角边， $\angle C'$ 为直角构造 $\text{Rt}\triangle A'B'C'$ ，



则由勾股定理得 $A'B'^2 = a^2 + b^2$,

由已知可知 $A'B' = c$,

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

$\therefore \angle C = \angle C' = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形 .

2、三角形三边关系 :

①若 $c^2 = a^2 + b^2$, 则 $\triangle ABC$ 是以 $\angle C$ 为直角的直角三角形 ;

②若 $a^2 + b^2 < c^2$, 则此三角形为钝角三角形 (其中 c 为最大边) ;

③若 $a^2 + b^2 > c^2$, 则此三角形为锐角三角形 (其中 c 为最大边) .

|| 例题

15. 在下列由线段 a , b , c 的长为三边的三角形中 , 不能构成直角三角形的是 () .

A. $a = 40$, $b = 50$, $c = 60$

B. $a = 1.5$, $b = 2$, $c = 2.5$

C. $a = \frac{5}{4}$, $b = 1$, $c = \frac{3}{4}$

D. $a = 7$, $b = 24$, $c = 25$

【答案】 A

【解析】 $a = 40$, $b = 50$, $c = 60$,

$$40^2 + 50^2 \neq 60^2 .$$

【标注】 【知识点】 勾股定理的逆定理

【重点强调】

2018~2019学年3月天津和平区天津市双菱中学初二下学期月考第2题

16. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a , b , c , 且满足 $(a-5)^2 + |b-12| + \sqrt{c-13} = 0$, 则 $\triangle ABC$ () .

A. 不是直角三角形

B. 是以 a 为斜边的直角三角形

C. 是以 b 为斜边的直角三角形

D. 是以 c 为斜边的直角三角形

【答案】 D

【解析】 $\because (a-5)^2 + |b-12| + \sqrt{c-13} = 0$,

$$\therefore \begin{cases} a-5=0 \\ b-12=0 \\ c-13=0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a=5 \\ b=12 \\ c=13 \end{cases},$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2,$$

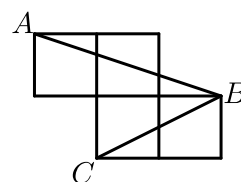
$\therefore$ 是以 c 为斜边的直角三角形.

【标注】【知识点】勾股定理的逆定理

【重点强调】

2018~2019学年3月天津河西区自立中学初二下学期月考第5题3分

17. 如图, 每个小正方形的边长为1, A 、 B 、 C 是小正方形的顶点, 则 $\angle ABC$ 的度数为().



A. 90°

B. 60°

C. 45°

D. 30°

【答案】C

【解析】根据勾股定理可以得到: $AC = BC = \sqrt{5}$, $AB = \sqrt{10}$.

$$\therefore (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 = (\sqrt{10})^2.$$

$$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

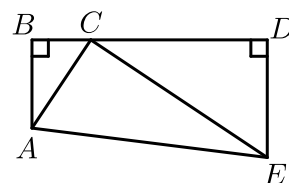
$$\therefore \angle ABC = 45^\circ.$$

故选: C.

【标注】【知识点】勾股逆定理的应用

18. 如图, 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 与 $\text{Rt}\triangle CDE$ 有一个公共点 C , 其中 $\angle B = \angle D = 90^\circ$, 若 $AB = 3$,

$BC = 2$, $CD = 6$, $DE = 4$, $AE = \sqrt{65}$. 求证: $\angle ACE = 90^\circ$.



【答案】证明见解析.

【解析】 $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理得： $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ ，
 在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中，由勾股定理得： $CE = \sqrt{CD^2 + DE^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$ ，
 $\therefore AE = \sqrt{65}$ ，
 $\therefore AE^2 = AC^2 + CE^2$ ，
 $\therefore \angle ACE = 90^\circ$ 。

【标注】【知识点】勾股逆定理的应用

练习

19. 下列说法正确的有（ ）。

①如果 $\angle A + \angle B = \angle C$ ，那么 $\triangle ABC$ 是直角三角形；②如果 $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$ ，则三角形是直角三角形；③如果三角形的三边长分别为 4、4、6，那么这个三角形不是直角三角形；④有一个角是直角的三角形是直角三角形。

A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】 D

【解析】 ① $\because \angle A + \angle B = \angle C$ ，且 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ，得 $\angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，故①正确；

② 设 $\angle A = x$ ， $\angle B = 2x$ ， $\angle C = 3x$ ，则 $\angle A + \angle B = \angle C$ ，由①知，该三角形是直角三角形，故②正确；

③ $4^2 = 16$ ， $6^2 = 36$ ，显然 $4^2 + 4^2 \neq 6^2$ ，不符合勾股定理的逆定理，该三角形不是直角三角形，故③正确；

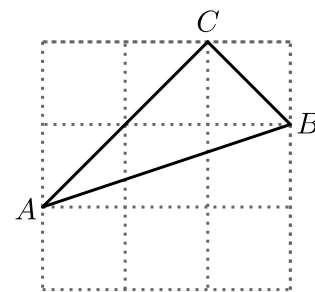
④ 符合直角三角形的判定方法，故④正确；

所以4个结论都正确，

故选D。

【标注】【知识点】勾股逆定理的应用

20. 如图，在 3×3 的正方形网格中，每个小正方形的边长都为1， $\triangle ABC$ 的三个顶点均在格点上，则 AB 边上的高为（ ）。



A. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

D. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

【答案】 A

【解析】 设 $\triangle ABC$ 中， AB 边上的高为 h ，

$$\because AB^2 = 10, AC^2 = 8, BC^2 = 2,$$

$$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC = \frac{1}{2} AB \cdot h, \text{ 即 } \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times h.$$

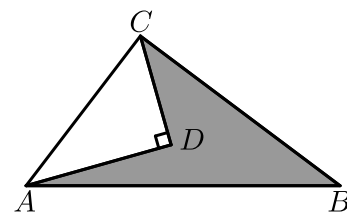
$$\therefore h = \frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

【标注】 【知识点】 勾股逆定理的应用

【重点强调】

2017~2018学年3月天津河西区天津市第四十二中学初二下学期月考第3题3分

21. 如图所示的一块地（图中阴影部分）， $\angle ADC = 90^\circ$ ， $AD = 12$ ， $CD = 9$ ， $AB = 25$ ， $BC = 20$ ．



（1）求 $\angle ACB$ 的度数．

（2）求阴影部分的面积．

【答案】 （1） $\angle ACB = 90^\circ$ ．

（2）96．

【解析】 （1）在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中，

$$\because AD = 12, CD = 9,$$

$$\therefore AC^2 = AD^2 + CD^2 = 12^2 + 9^2 = 225 ,$$

$$\therefore AC = 15 .$$

在 $\triangle ABC$ 中 .

$$\therefore AC^2 + BC^2 = 15^2 + 20^2 = 625 , AB^2 = 25^2 = 625 ,$$

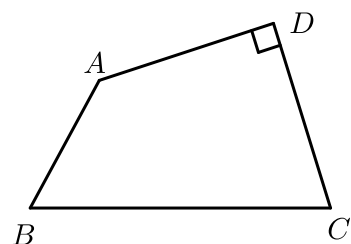
$$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2 ,$$

$\therefore \triangle ACB$ 为直角三角形, $\angle ACB = 90^\circ$.

$$\begin{aligned} (2) S_{\text{阴影}} &= \frac{1}{2} AC \cdot BC - \frac{1}{2} AD \cdot CD \\ &= \frac{1}{2} \times 15 \times 20 - \frac{1}{2} \times 12 \times 9 \\ &= 96 . \end{aligned}$$

【标注】【知识点】勾股逆定理的应用

22. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle D = 90^\circ$, $AB = 2$, $BC = 4$, $CD = AD = \sqrt{6}$.



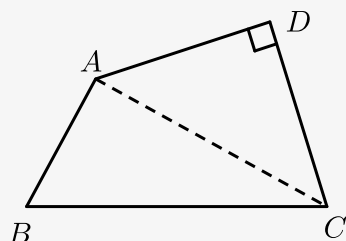
(1) 求 $\angle BAD$ 的度数 .

(2) 求四边形 $ABCD$ 的面积 .

【答案】 (1) $\angle BAD = 135^\circ$.

(2) $S_{\text{四边形}ABCD} = 2\sqrt{3} + 3$.

【解析】 (1) 连接 AC ,



$$\because AD = CD = \sqrt{6} , \angle D = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle DAC = 45^\circ , AC = 2\sqrt{3} ,$$

$$\because AB = 2 , BC = 4 ,$$

$$\therefore AB^2 + AC^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 = 16 = BC^2 ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形, 且 $\angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAD = \angle BAC + \angle DAC = 135^\circ$.

(2) 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$,

在 $\text{Rt} \triangle ADC$ 中, $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot CD = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \sqrt{6} = 3$,

$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = 2\sqrt{3} + 3$.

【标注】【知识点】勾股逆定理的应用

【重点强调】

2017~2018 学年天津南开区天津市南开翔宇学校初二下学期期中第 20 题

|| 例题

23. $\triangle ABC$ 的三边长为 4cm、5cm、6cm, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 () .

- A. 锐角三角形 B. 直角三角形 C. 钝角三角形 D. 不能判定

【答案】 A

【解析】 $a^2 + b^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$,

$$c^2 = 6^2 = 36,$$

$$\therefore a^2 + b^2 > c^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为锐角三角形.

故选 A.

【标注】【知识点】三角形的分类

【重点强调】

2019~2020 学年 3 月天津南开区天津市南开翔宇学校初二下学期月考第 4 题 3 分

|| 练习

24. 在 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, $AB = 5$, $AC = 12$, $BC = a$, 则 a 的取值范围是 _____ .

【答案】 $\sqrt{119} < a < 13$

【解析】 锐角三角形满足两边平方和小于第三边平方和,

$$\therefore \begin{cases} 5^2 + 12^2 > a^2 \\ 5^2 + a^2 > 12^2 \\ 12^2 + a^2 > 5^2 \end{cases}$$

解得 $\sqrt{119} < a < 13$.

【标注】【知识点】已知两边求第三边-分类讨论

25. 下列长度的三条线段能组成钝角三角形的是 () .

A. 3, 4, 4

B. 3, 4, 5

C. 3, 4, 6

D. 3, 4, 7

【答案】C

【解析】A、因为 $3^2 + 4^2 > 4^2$ ，所以三条线段能组成锐角三角形，不符合题意 .

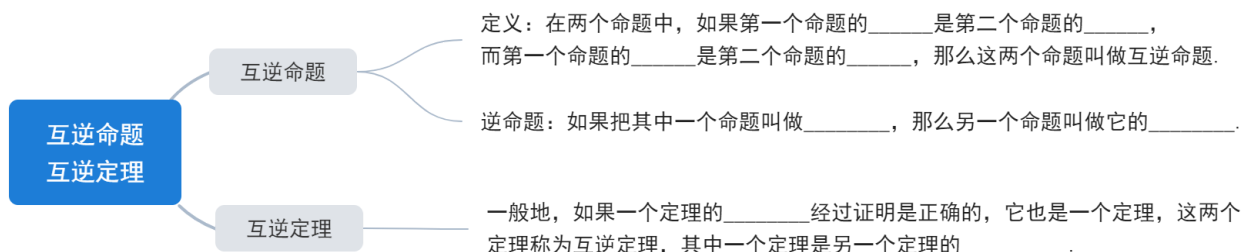
B、因为 $3^2 + 4^2 = 5^2$ ，所以三条线段能组成直角三角形，不符合题意 .

C、因为 $3 + 4 > 6$ ，且 $3^2 + 4^2 < 6^2$ ，所以三条线段能组成钝角三角形，符合题意 .

D、因为 $3 + 4 = 7$ ，所以三条线段不能组成三角形，不符合题意 .

【标注】【知识点】勾股定理的逆定理

四、互逆命题与互逆定理



【教法备注】

1、互逆命题：在两个命题中，如果第一个命题的题设是第二个命题的结论，而第一个命题的结论是第二个命题的题设，那么这两个命题叫做互逆命题 .

逆命题：如果把其中一个命题叫做原命题，那么另一个命题叫做它的逆命题 .

每一个命题都有逆命题，只要将原命题的题设改为结论，并将结论改成题设，便可得到原命题的逆命题 .

注意：

原命题正确，其逆命题未必正确；原命题不正确，其逆命题也不一定错误；

正确的命题称为真命题，错误的命题称为假命题 .

方法总结：

写一个命题的逆命题的关键是分清它的题设和结论，然后将题设和结论交换位置，写出它的逆命题，可以借助“如果……那么……”分清题设和结论。

2、互逆定理：一般地，如果一个定理的逆命题经过证明是正确的，它也是一个定理，这两个定理称为互逆定理，其中一个定理是另一个定理的逆定理。

注意：

- ① 每一个命题都有逆命题，但不是所有定理都有逆定理。
- ② 命题不一定是真命题，更不一定是定理，定理是经过证明了的真命题。

例题

26. 下列命题中错误的是（ ）。

- A. 任何一个命题都有逆命题
- B. 一个真命题的逆命题可能是真命题
- C. 一个定理不一定有逆定理
- D. 任何一个定理都没有逆定理

【答案】 D

【解析】 A、任何一个命题都有逆命题，所以A选项的说法正确；
B、一个真命题的逆命题可能是真命题，也可能为假命题，所以B选项的说法正确；
C、一个定理不一定有逆定理，所以C选项的说法正确；
D、有的定理有逆定理，有的定理不一定有逆定理，所以D选项的说法错误。
故选D。

【标注】【知识点】逆命题

27. 命题“直角三角形的两个锐角互余”的逆命题是 _____。

【答案】 有两个锐角互余的三角形是直角三角形

【解析】 命题“直角三角形的两个锐角互余”的逆命题为“两个锐角互余的三角形是直角三角形”。

故答案为：两个锐角互余的三角形是直角三角形。

【标注】【知识点】余角和补角

练习

28.

有下列命题：①真命题都是定理；②定理都是真命题；③假命题不是命题；④公理都是命题．其中真命题有（ ）．

- A. 2个 B. 3个 C. 4个 D. 1个

【答案】 A

【解析】 ①真命题不一定是定理，故①是假命题；

②定理都是真命题，故②是真命题；

③假命题是命题，故③是假命题；

④公理都是命题，故④是真命题．

其中真命题有②④，一共2个．

故选A．

【标注】【知识点】区分真假命题

29. 下列命题：①若 $|a| > |b|$ ，则 $a > b$ ；②直角三角形的两个锐角互余；③如果 $a = 0$ ，那么 $ab = 0$ ；

④4个角都是直角的四边形是正方形．

其中，原命题和逆命题均为真命题的有（ ）．

- A. 0个 B. 1个 C. 2个 D. 3个

【答案】 B

【解析】 ①若 $|a| > |b|$ ，无法确定 a 、 b 的大小关系，

例如 $a = -4$ ， $b = 1$ ，故原命题是假命题，

逆命题：若 $a > b$ ，则 $|a| > |b|$ ，是假命题；

故①不符合题意．

②直角三角形的两个锐角互余，是真命题；

两个锐角互余的三角形是直角三角形，是真命题；

故②符合题意．

③如果 $a = 0$ ，那么 $ab = 0$ ，是真命题；

逆命题：如果 $ab = 0$ ，则 $a = 0$ 或 $b = 0$ ，是假命题；

故③不符合题意．

④四个角都是直角的四边形不一定是正方形，还有可能是长方形，故原命题为假命题；

逆命题：正方形是四个角都是直角的四边形，是真命题；

故④不符合题意．

综上所述，原命题和逆命题均为真命题的有1个，故选B．

【标注】【知识点】逆命题

30. 命题“两直线平行，同位角相等”的逆命题是 _____ ．

【答案】同位角相等，两直线平行

【解析】∵原命题的条件为：两直线平行，结论为：同位角相等．

∴其逆命题为：同位角相等，两直线平行．

【标注】【知识点】平行线判定

【重点强调】

2018~2019学年3月天津和平区天津市双菱中学初二下学期月考第14题